VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Gentzenův důkazový kalkul

Gentzen Proof Calculus

2015

Bc. Halina Kajzarová

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Halina Kajzarová**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 2612T025 Informatika a výpočetní technika

Téma: Gentzenův důkazový kalkul
Gentzen Proof Calculus

Zásady pro vypracování:

Studentka vypracuje přehlednou studii o sekventových důkazových kalkulech doplněnou o názorné příklady důkazů tak, aby práce mohla být použita při výuce v předmětu "Vybrané partie z logiky".
Práce bude obsahovat:
1. Definice důkazových kalkulů, pojem důkazu, přímý a nepřímý důkaz.
2. Gentzenovy důkazové kalkuly pro predikátovou logiku 1. řádu - definice.
3. Vlastnosti sekventových kalkulů LK ("logistischer klassischer Kalkül")a LJ (důkazový systém pro intuicionistickou logiku),zejména teorém eliminace řezu.
4. Varianty sekventových kalkulů pro substrukturální logiku.
5. Každá varianta sekventového kalkulu bude doprovázena přehledně zpracovanými příklady důkazů.

Seznam doporučené odborné literatury:

[1] Interaktivní tutoriál: http://logitext.mit.edu/logitext.fcgi/tutorial
[2] Sakharov, Alex. "Sequent Calculus." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. http://mathworld.wolfram.com/SequentCalculus.html
[3] Gentzen, G. The Collected Papers of Gerhard Gentzen (Ed. M. E. Szabo). Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1969
[4] Kleene, S. C. Introduction to Metamathematics. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1964

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Marie Duží, CSc.**

Datum zadání: 01.09.2013
Datum odevzdání: 07.05.2015

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA
Fakulta elektrotechniky a informatiky
OSTRAVA

doc. Dr. Ing. Eduard Sojka
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Souhlasím se zveřejněním této diplomové práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v magisterských programech VŠB-TU Ostrava.*

V Ostravě 5. května 2015 ....

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 5. května 2015 ....

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. RNDr. Marie Duží, CSc., za vedení diplomové práce a cenné připomínky.

Abstrakt

Diplomová práce předkládá studii Gentzenovského (sekventového) kalkulu s vypracovanými příklady a ukazuje práci v sekventovém kalkulu. Práce dále obsahuje popis a vysvětlení pojmu teorému eliminace řezu (Hauptsatz) v sekventovém kalkulu a také popis variant sekventových kalkulů pro substrukturální logiku. Součástí práce je i stručná charakteristika různých variant důkazových kalkulů.

Klíčová slova: Důkazový kalkul, důkaz, přirozená dedukce, Hilbertův system, sekventový kalkul, Gentzen, teorém eliminace řezu, Hauptsatz, substrukturální logika.

Abstract

This thesis is a study of Gentzen's proof calculi (sequent calculi) with wide range of solved examples and demonstrates how to work with sequent calculi. The thesis also comprises and explains the cut elimination theorem (Hauptsatz) in sequent calculi and briefly descriscribes substructural logics for sequent calculus. Last but not least, different variants of proof calculi are also described.

Keywords: Proof calculi, proof, natural deduction, Hilbert's system, sequent calculi, Gentzen, cut elimination theorem, Hauptsatz, substructural logic.

Seznam použitých zkratek a symbolů

HK	–	Hilbertův kalul
LK	–	Klassiche Pradikatenlogik
LJ	–	Logicko-intuistický

Obsah

1 Úvod 2
1.1 Od začátků logiky k teorii důkazů 2
1.2 Gerhard Gentzen. Jeho život a přínos pro logiku 4

2 Důkazové kalkuly 7
2.1 Hilbertův program 7
2.2 Přirozená dedukce 9

3 Gentzenův systém 18
3.1 Definice sekventového kalkulu 18
3.2 Gentzenův kalkul LK (Klassische Prädikatenlogik) 19
3.3 Příklady 22
3.4 Gentzenův kalkul pro intuicionistickou logiku (LJ) 28
3.5 Gentzenův kalkul LK′ and LJ′ 28
3.6 Základní definice LK′ a LJ′ 29
3.7 Teorém eliminace řezu - Gentzenův Hauspatz 33
3.8 Důkaz simulace kalkulu přirozené dedukce pomoci sekventového kalkulu s řezem 37

4 Varianty sekventových kalkulů pro substrukturální logiky 38
4.1 Strukturální pravidla v Gentzénovském sekventovém kalkulu 38

5 Závěr 42

6 Reference 43

1 Úvod

1.1 Od začátků logiky k teorii důkazů

1.1.1 Pojem logika

Logika spolu s mnoha dalšími vědami vychází z filozofie a jako její nedílná součást existuje již od 4. století před našim letopočtem. Pojem logika pochází z řeckého jazyka od slova logos, které označuje vědu zkoumající způsob vyvozování závěrů z předpokladů. Hlavním cílem logiky není zkoumání lidské mysli, tak jak v psychologii nebo studium obecných hranic lidského poznání, jak je tomu v epistemologii. Neformální logika se zaměřuje na problematiku správné argumentace v přirozeném jazyce, zatímco formální logika se zabývá formulací a zkoumáním abstraktních odvozovacích pravidel. To jest formami úsudku, kde jejich platnost není závislá na významu výrazů, které v nich vystupují. S logikou se také můžeme setkat v matematice a proto se také mluví i o matematické logice. Pojem matematická logika se dělí na dvě části výzkumu:

- aplikace poznatků z oblasti formální logiky na matematiku
- aplikace matematických struktur a technik ve formální logice

1.1.2 Vznik a vývoj logiky

Počátky logiky spadají do vrcholného období řecké filosofie. Poznatky, které byly nalezeny v dílech dvou řeckých filosofů Platona (428/7-347 př. n. l.) a Sokrata (asi 469-399 př.n.l), dokazují, že se již oni zabývali (mimo jiné) logickými principy. Logické principy jsou principy spojující syntaktickou strukturu věty s významem věty, s pravdou či nepravdou vyřčené věty nebo s významem platnosti argumentů. Prostor dalšímu vývoji logiky dali Stoikové. Kolem roku 300 p. n. l byl založen nový filozofický směr stoicismus. Zakladatelem a učitelem byl řecký filozof Zenon z Kita. Jeho následníky byl Kleanthesem z Assu a později také Chrysippuse ze Soloi. Stoicismus je směr, kde dochází k propojeni logiky, fyziky a etiky. Logika učí správnému myšlení a jasnému vyjadřování. Fyzika je porozumění racionální struktuře světa a etika je teorie morálky. Vzory uvažování popsané stoickými logiky jsou propojené zákonitosti mezi výroky, které jsou zcela nezávislé na tom, co výroky říkají.

1.1.3 Aristotelova logika

Za zakladatele logiky je považován Aristoteles (Aristotelés ze Stageiry 384 př. n. l. - 322 př. n. l.), který jako první zavedl systematické studie o logice. Tyto studie zapojují kvantifikaci a komponenty jako "pro všechny"a "některé". Aristoteles se snažil analyzovat logické myšleni v jednoduchých odvozovacích pravidlech nazývaných sylogismy. Jedná se o odvozeni jednoho tvrzení z dvou předchozích. Zdá se, že Aristoteles věřil, že každý logický argument lze v zásadě rozdělit do řady aplikací malého počtu sylogismů. Z celkem 64 různých modů sylogismů označil Aristoteles 19 jako platných. Aristotelovy sylogismy můžeme vnímat jako začátky teorie důkazů.

Příklady sylogismů:

P1.	Všichni muži jsou smrtelní
P2.	Sokrates je muž
Z,	Sokrates je smrtelný

V případě výše zmíněného úsudku je zřejmé, že existuje obecný vzorec a to:

P1.	Všichni M jsou P
P2.	S je M
Z,	S je P

Některé z dalších Aristotelových sylogismů jsou méně zřetelné, např.:

P1.	Žádné M není P
P2.	Některé S je M
Z,	Některé S není P

Po Aristotelově smrti jeho studenti shromáždili veškeré jeho listy a vydali je jako souhrnný spis pod názvem Organon, kde je první systematické pojednání o logice. Tyto sylogismy byly používány až do 17. století, kdy se ukázalo, že Aristotelovy sylogismy jsou nedostatečné pro potřeby moderní logiky.

1.1.4 Moderní logika

V období 17. století se začaly psát dějiny moderní logiky. Gottfried Wilhem Leibniz (1. července 1646 Lipsko – 14. listopadu 1716 Hannover- německý filosof, vědec, matematik a teolog) se zabýval myšlenkou vytvořená vzoru umělého formálního jazyka na matematické notaci za účelem objasnění logické formy a omezeni logického úsudku na mechanické uvažování v ryze formálním jazyce. Leibniz také přispěl aritmetizaci sylogismů v teorii vztahů v modální logice a logické gramatice.

V 19. století Friedrich Ludwig Gottlob Frege (8. listopadu 1848, Wismar – 26. července 1925, Bad Kleinen - německý matematik, logik a filosof, dlouholetý profesor univerzity v Jeně) ve své práci Pojmové písmo (1879) (Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens) publikoval pojmové písmo a ukázal nové možnosti použití kvantifikátorů, funkcí a proměnných.

Novodobé dějiny teorie důkazu psal také David Hilbert (23.ledna 1862 Wehlau (dnes Znamensk), Východní Prusko 14.února 1943 Göttingen, Německo), jenž vymyslel to, co dnes známe pod pojmem Hilbertův program v základech matematiky. Cílem programu bylo formalizovat matematiku až na úroveň jednoduchých axiomů, ze kterých by se daly korektně dokázat všechny matematické věty. Tento program byl Hilbertem vyhlášen ve 20. letech 20. století. Následně Kurt Godel v roce 1931 dokázal věty o neúplnosti, které ukazují, že v rekurzivně axiomatizované teorii nelze dokázat bezespornost a úplnost aritmetiky samotné. Také dokazují, že žádná axiomatická teorie, která by se dala používat k popisu všech matematických pravd, neexistuje a nemůže dokázat svoji vlastni bezespornost. Žákem Davida Hilberta byl Gergard Gentzen, jenž pokračoval v jeho práci a věnoval se logice a základům matematiky. Jeho největším přínosem pro logiku byl kalkul přirozené dedukce a sekventový kalkul.

1.2 Gerhard Gentzen. Jeho život a přínos pro logiku

Německý logik a matematik Gerhard Karl Erich Gentzen se narodil 24. 11. 1909 v Greifswaldu (Německo - Pomořany). Vyrůstal v Bergenu na Rujáně (Rugen). Jeho otec Hans Gentzen zde působil jako právník, matka Melanie, roz. Bilharozva, pracovala jako učitelka na obchodní škole.

Pocházel z rodiny se zvučným jménem, které rezonuje zejména díky zásluhám jeho dědečka Alfonze Bilharze z matčiny strany (2.5. 1836 Sigmaringen - 23.5 1925 tamtéž), filozofa a významného lékaře působícího na klinikách v USA, později šéflékaře Sigmaringenské kliniky. A. Bilharz je považován za zakladatele moderní ontologie, svojí práci a výzkum vydal v mnoha publikacích.

Stejně tak strýc, starší Alfonsův bratr Theodor Bilharz (23.3. 1825 Sigmaringen - 9.5. 1862 Kahira) je považován za významného vědce v oboru lékařství. Věnoval se zkoumání tropických nemoci. Díky svým vědeckým výzkumům objevil původce endemického moru tropických zemi, který byl pojmenován bilharcióza. Od roku 1855 byl profesorem tropických chorob na káhirské univerzitě.

Gerhard ve svém bádání, ač v trochu jiných oborech, navázal na úspěšnou linii svých předků.

První světová válka zastihla Gerharda ve věku 5 let. V průběhu války přišel o otce, který podlehl následkům válečného zranění. Základní školu a gymnázium navštěvoval v Stralsundu, kam se s matkou a mladší sestrou přestěhovali. Tady se už projevoval jeho matematický talent. Během studia na gymnáziu se s velkým zájmem věnoval matematice a vypracoval několik seminárních prací na téma analytické geometrie a nebeské mechaniky, kde se mu povedlo stanovit postavení planet. Bohužel se tyto práce nedochovaly. Po úspěšném ukončeni gymnázia maturitní zkouškou a díky doporučeni ředitele, Gentzen obdržel stipendium od Deutsche Studentenwerk a tak mohl pokračovat v univerzitním studiu. Gentzen přechodně studoval na univerzitě v Reifswaldu, v Gottingen, v Mnichově a v Berlíně.

V r. 1933 prezentuje svou disertační práci na téma „Untersuchungen Uber das logische Schliessen." Byl promován na doktora filozofie. Na universitě v Gottingenu se Gerhard Gentzen setkal s Davidem Hilbertem, coby vyučujícím. V roce 1935 se stal jeho asistentem. Hilbert v tomto období pracoval na svém programu, dnes známé jako Hilbertův program. Jak je známo, David Hilbert chtěl ukázat, že matematika je čistě formální hra, kterou jde provádět s nekonečným počtem znaků na papíře podle důkladně definovaných pravidel manipulace s těmito znaky. Důležitý byl požadavek, aby během této hry nedošlo ke sporu. Hilbert vyžadoval, aby pravidla byla přesná a nezahrnovala aktuální nekonečno, což může vest k paradoxům a tedy nekonzistenci. To znamená, že musí být možnost je zakódovat pro počítače. Tento úkol dokončil Gentzen svým bez-řezovým důkazovým systémem pro logiky 1. řádu. Této tematice je věnováno dílo Hilbert - Bernays: Grundlagen der Mathematik I (1934) a II (1939) a rovněž se o tomto tématu hovoří v Gentzenově habilitační práci Untersuchungen Uber das logische Schliefien (1935). Díky návrhu systému bez-řezového důkazu došlo k rozšíření teorie důkazů o popsání formalizace logických dedukcí, o kterou se snažil Hilbert. Gerhard Gentzen byl žákem, pak asistentem a následně pokračovatelem Hilbertova programu. Gerhard Gentzen pracoval nad svými důkazy bezespornosti různých matematických systémů, o které se zajímal Hilbert ve svém programu. Gentzen dokázal bezespornost čisté teorie čísel (Peanovy axiomy s úplnou indukci). Tento důkaz je publikován v článku Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie (1936) a Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitbeweises fur die reine Zahlentheorie (1939). Po důkazu bezespornosti čisté teorie čísel se chtěl věnovat práci nad důkazem bezespornosti matematické analýzy. Bohužel toto již nedokončil. V roce 1938 je jmenován mimořádným profesorem na Univerzitě Karlově v Praze. Ani po válce neopouští Prahu, je zatčen kvůli spojení s NSDAP a 3 měsíce po tom ve věznici na Karlově náměstí umírá. Gerhard Gentzen zemřel v r. 1945 ve svých 36 letech.

V této kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [11, 12, 13]

2 Důkazové kalkuly

Koncem 19. století se začala vyvíjet metoda důkazových kalkulů a to proto, že v matematice se začaly objevovat paradoxy na základě aktuálního nekonečna. Tehdy David Hilbert (německý matematik) byl jedním z prvních matematiků, který se začal zajímat o tuto tématiku a vyhlásil Program pro formalizaci matematiky, kde chtěl ukázat, jak zabránit paradoxům. Dnes tento program je znám pod názvem Hilbertův program. Myšlenka, jak se vyhnout paradoxům, byla jednoduchá. Stačí používat pouze finitní metody, tedy:

I. začneme s rozhodnutelnou množinou (logicky) pravdivých formuli, použijeme dedukční pravidla, která zachovávají pravdivost a odvodíme všechny logické pravdy,

II. v určité oblasti zájmu (interpretaci), vybereme zaručeně pravdivé věty, použijeme dedukční pravidla, která zachovávají pravdivost a odvodíme všechny pravdy z té určité oblasti zájmu.

David Hilbert se tímto způsobem zejména snažil axiomatizovat matematiku, aby se vyhnul paradoxům.

V jedné ze svých významných seminárních prací na téma teorie důkazů, Kurt Gödel dokázal věty o neúplnosti aritmetiky, což prakticky vedlo k tomu, že Hilbertův program se ukázal jako neuskutečnitelný.

Paralelně se také vyvíjela strukturální teorie důkazů, na které pracoval Jan Lukasiewicz. Na tuto skutečnost ihned reagoval Gerhard Gentzen, žák Davida Hilberta a uvedl nový systém, který se jmenoval přirozená dedukce. V přirozené dedukci je zavedená myšlenka symetrie mezi důvody pro tvrzení, vyjádřením pravidla zavedení a důsledky akceptování tvrzení v pravidlech eliminace. Tato myšlenka se pak ukázala jako velmi důležitá v celé teorii důkazů. Gerhard Gentzen ještě přispěl publikováním sekventového kalkulu, kde popsal první důkaz konzistence Peanovy aritmetiky.

2.1 Hilbertův program

Hilbertův program byl vyhlášen v 20. letech 20. století a jeho autorem je německý matematik David Hilbert.

2.1.1 Hilbertův kalkul

Hilbertův systém (Hilbertův kalkulus – dále v textu HK) se řadí do skupiny důkazových kalkulů a formálních axiomatických systémů. Můžeme rozlišovat verzi pro výrokovou a predikátovou logiku.

Jelikož se jedná o axiomatický systém, používají se zde axiomy. Pro odvozování je zvolené dedukční pravidlo modus ponens a pravidlo generalizace.

2.1.1.1 Základní axiomy

V Hilbertově kalkulu pro variantu výrokové logiky se používají tři základní axiomy, které jsou popsané níže:

Axiomy: $(A \to (B \to A)$
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Hilbertův kalkul pro variantu predikátové logiky je rozšířen o axiomy pro všeobecný kvantifikátor:

Ax. substituce $\forall x A(x) \to A(x/t)$
term t je substituovatelný za proměnnou x v A

Ax. $\forall$-distribuce $(\forall x(A \to B(x))) \to (A \to \forall x B(x))$
proměnná x není volná v A

2.1.1.2 Odvozovací pravidla

Odvozovací pravidla hrají důležitou roli v axiomatizaci logiky. Tato pravidla nejsou axiomy, ale často jsou zařazovaná mezi ně, protože k nim mají velmi blízký vztah. V HK pro odvozování jsou dvě pravidla. Jedná se o pravidlo generalizace, které je pouze v predikátové logice, a pravidlo modus pones, které se vyskytuje jak v predikátové tak ve výrokové logice.

Dedukční pravidlo: $A, A \to B \vdash B$ modus ponens
$A \vdash \forall x A$ G ... generalizace

2.1.1.3 Důkaz v Hilbertovském kalkulu

Za důkaz v predikátové nebo výrokové variantě HK nějakého tvrzení α v jazyce L v teorii T můžeme považovat jakoukoliv posloupnost formulí jazyka L, kde formule α je jejím členem. Zároveň pro každý její člen β musí platit alespoň jedna ze tří zmíněných podmínek

- β je logický axiom

- β je jeden z vlastních axiomů teorie T

- β je odvozená z předchozích tvrzení za použití odvozovacího pravidla Modus Ponens nebo pravidla generalizace

V Hilbertovském kalkulu se využívá způsob přímého dokazování.

2.1.1.4 Vlastnosti Hilbertovského kalkulu

Hilbertův systém můžeme považovat za korektní (sématicky konzistentní) a úplný, a tedy platí:

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A$$

Korektnost důkazového kalkulu znamená:

- všechny axiomy jsou logicky pravdivé.
- pravidlo modus ponens zachovává pravdivost.
- pravidlo generalizace $A \vdash \forall x A$ nezachovává pravdivost, ale zachovává pravdivost v interpretaci. Jelikož jsou axiomy kalkulu pravdivé v každé interpretaci, a speciální axiomy teorie jsou pravdivé v těch interpretacích, které jsou modely teorie, můžeme pravidlo generalizace bez obav používat, neboť pravdivost v příslušných interpretacích bude zachována.

2.2 Přirozená dedukce

Kalkul přirozené dedukce byl uveden v roce 1935 Gerhardem Gentzenem. Tehdy popsal všechna pravidla přirozené dedukce pro variantu klasické i intuicionistické predikátové logiky.

Přirozená dedukce je také jedním z důkazových kalkulů, ale oproti Hilbertovského systému se řadí k formálním předpokladovým systémům. Odvozování v tomto systému může probíhat způsobem lineárního odvozování (takzvaná polská metoda) nebo za pomoci stromové struktury, kterou vyvinul Gentzen. Vzhledem k tématu práce je zde pro odvozování zvolena metoda stromové struktury.

V přirozené dedkuci se používá dedukční pravidlo, které má následující tvar:

$$A_1, A_2, ..., A_m \vdash B_1, B_2, ..., B_n.$$

Toto pravidlo můžeme vysvětlit tak, že pokud platí všechny formule $A_1, A_2, ..., A_m$, pak z toho vyplývá, že je platná libovolná formule z formulí $B_1, B_2, ..., B_n$. To znamená, že pokud byly dokázány všechny formule z levé strany dedukčního pravidla, pak můžeme považovat za dokázanou i libovolnou formuli z pravé strany pravidla.

Poznámka 2.1 Každý předpoklad by měl být označen pomocí písmena abecedy, nebo čísla. Předpoklady, které patří do stejné množiny předpokladů, mají totožné značení jako třída předpokladů. Rozlišné předpoklady měly by mít jiné značení.

2.2.1 Dokazování v přirozené dedukci

2.2.1.1 Přímý důkaz formule β z předpokladů $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ je posloupnost formulí $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, kde β = β_m a pro každé $i \in \{1, ..., m\}$ platí pro β_i jedna z možností:

- $\beta_i \in \{\alpha_1, ...\alpha_n\}$ (je to jeden z předpokladů),
- β_i je axiom,
- formule β_i vznikla použitím odvozovacích pravidel na předchozí členy posloupnosti.

2.2.1.2 Nepřímý důkaz (sporem) formule β z předpokladů $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ je posloupnost formulí $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, kde:

- pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ je $\beta_i = \alpha_i$ (předpoklady),
- $\beta_{n+1} = \neg\beta$,
- pro každé $i > (n+1)$ pro β_i platí některé z těchto pravidel:
    - $\beta_i \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ (předpoklady)
    - β_i je axiom
    - formule β_i vznikla použitím odvozovacího pravidla na předcházející členy posloupnosti.
- $\beta_m = \neg\beta_j$ pro n$\gamma \rightarrow \delta$ může být připojena k řádnému důkazu jako teorém.ějaké $j < m$ (spor).

2.2.1.3 Podmíněné důkazy

V posloupnosti formulí, která tvoří důkaz, může být za počáteční skupinu předpokladů $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ zaveden další hypotetický předpoklad γ.
Formule $\gamma \rightarrow \delta$ může být připojena k řádnému důkazu jako teorém, pokud formuli δ jde odvodit na základě hypotetického předpokladu a řádného předpokladu.
V případě, že odvozená formule δ je negací řádného předpokladu, pak formule $\neg\gamma$ může být použita jako teorém.

2.2.2 Odvozovací pravidla

V kalkulu přirozené dedukce se rozlišují dva typy odvozovacích pravidel pro každou spojku. To znamená, že máme pravidlo pro zavedení a eliminaci logické spojky.

2.2.2.1 Pravidlo zavedení a eliminace logické spojky konjunkce.

Přímý důkaz formule $A \wedge B$ se zakládá v důkazů tvrzení A a v důkazu tvrzení B, což udává pravidlo pro zavedení konjunkce.

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1 & \Delta_2 \\ A & B\end{matrix}}{B \wedge A} \wedge I$$

Eliminační pravidlo pro konjunkci.

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A \wedge B\end{matrix}}{A} \wedge E_r \qquad \frac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A \wedge B\end{matrix}}{B} \wedge E_l$$

2.2.2.2 Pravidlo zavedení a eliminace logické spojky disjunkce.

Pravidlo pro zavedení disjunkce se zakládá na přímém důkazu formule $A \vee B$ a spočívá v důkazu tvrzení A nebo v důkazu tvrzení B.

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A\end{matrix}}{A \vee B} \vee I_r \qquad \frac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ B\end{matrix}}{A \vee B} \vee I_l$$

Eliminace disjunkce je dána těmito pravidly:

$$\frac{\begin{matrix}\Delta_1 & \Delta_2 \\ A \vee B & \neg A\end{matrix}}{B} \vee E \qquad \frac{\begin{matrix}\Delta_1 & \Delta_2 \\ A \vee B & \neg B\end{matrix}}{A} \vee E$$

Pokud nelze pravidlo eliminace disjunkce aplikovat, použijeme důkaz z hypotéz. Obě formule A a B přijmeme jako hypotetické předpoklady, a pokud jak z A, tak z B dokážeme formuli C, pak platí, že jsme dokázali C z předpokladu $A \vee B$.

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A]^u & [B]^v \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ A \vee B & C & C \end{matrix}}{C} \vee E, u, v$$

Poznámka 2.2 Notace $[A]^u$, $[B]^v$ říká, že předpoklady $[A]^u$ a $[B]^v$ byly při odvozování využity a dále se nepoužívají.

Poznámka 2.3 Hypotetické předpoklady $[A]^u$, $[B]^v$ jsou použité pro odstranění předpokladu $A \vee B$. Při použití hypotetického odvozování usuzujeme, že pokud premisy $[A]^u$, $[B]^v$ jsou pravdivé a z obou odvodíme C, pak jsme dokázali C z disjunkce $A \vee B$.

Příklad 2.1
Názorná ukázka využití pravidla.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & [A]^v & [B]^w \\ [A \vee B]^u & B \vee A & B \vee A \end{matrix}}{B \vee A} \vee E, v, w}{(A \vee B) \to (B \vee A)} \to I, u$$

■

2.2.2.3 Pravidlo zavedení a eliminace logické spojky implikace.

Způsob přímého důkazu formule $A \to B$ spočívá v důkazu tvrzení B z předpokladu A.

$$\dfrac{\begin{matrix} [A]^u \\ \Delta_1 \\ B \end{matrix}}{A \to B} \to I, u$$

Poznámka 2.4 Notace $[A]^u$ říká, že předpoklad $[A]^u$ byl při odvozování použit, tedy je spotřebován a škrtá se.

Eliminační pravidlo pro implikaci:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Delta_1 & \Delta_2 \\ A \rightarrow B & A\end{matrix}}{B} \rightarrow E$$

2.2.2.4 Pravidlo zavedení a eliminace všeobecného kvantifikátoru

Pravidlo pro zavedení všeobecného kvantifikátoru:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A[x/y]\end{matrix}}{\forall x A} \forall I$$

Poznámka 2.5 Pravidlo zavedení všeobecného kvantifikátoru, může být použito pouze tehdy, jestliže formule $A(x)$ není odvozená z žádného předpokladu, který obsahuje volnou proměnnou x.

Pravidlo pro eliminaci všeobecného kvantifikátoru:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ \forall x A\end{matrix}}{A[x/t]} \forall E$$

Poznámka 2.6 Formule $A(x/t)$ je výsledkem správné substituce termu t za proměnnou x ve formuli $A(x)$, tedy term t musí být substituovatelný za x ve formuli A.

2.2.2.5 Pravidlo zavedení a eliminace existenčního kvantifikátoru

Pravidlo pro eliminaci existenčního kvantifikátoru je následující:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A[x/t]\end{matrix}}{\exists x A} \exists I$$

Pravidlo pro eliminaci existenčního kvantifikátoru je následující:

$$\cfrac{\begin{matrix} & [A[x/y]]^u \\ \Delta_1 & \Delta_2 \\ \exists x A & C\end{matrix}}{C} \exists E, u$$

2.2.2.6 Pravidlo pro konstantu sporu

Pravidlo pro zavedení sporu nemůžeme zavést, protože přímý důkaz pro spor neexistuje. Pro konstantu sporu existuje pouze pravidlo pro eliminaci sporu.

$$\begin{array}{c}\Delta_1\\ \dfrac{\perp}{A}\ \perp E\end{array}$$

2.2.3 Vlastnosti přirozené dedukce

Kalkul přirozené dedukce je korektní, tedy každá formule dokazatelná v tomto kalkulu je logicky platná. Tedy pro každou formuli A platí:

$$\vdash A \Rightarrow \models A$$

Navíc, každá logicky platná formule je dokazatelná v kalkulu přirozené dedukce, tedy kalkul přirozené dedukce je úplný:

$$\models A \Rightarrow \vdash A$$

2.2.4 Příklady

Příklad 2.2

$A \to (A \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A}}{A \to A}\ I \to, 1}{A \to (A \to A)}\ I \to$$

■

Příklad 2.3

$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^1 \qquad [A]^2}{[B \to C]}\ MP, 2, 1 \qquad \dfrac{[A \to B]^3 \qquad [A]^2}{B}\ MP, 2, 3}{C}\ MP}{A \to C}\ I \to, 2}{(A \to B) \to (A \to C)}\ I \to, 3}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\ I \to, 1$$

∎

Příklad 2.4

$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \to \neg B]^1 \qquad [\neg A]^2}{\neg B}\, MP, 2, 1 \qquad \dfrac{[\neg A \to B]^3 \qquad [\neg A]^2}{B}\, MP, 2, 3}{\bot}\, \bot}{A}}{(\neg A \to B) \to A}\, I \to, 3}{(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A))}\, I \to, 1$$

∎

Příklad 2.5

$(A \wedge B) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\, E\wedge, 1}{(A \wedge B) \to A}\, I \to, 1$$

∎

Příklad 2.6

$(A \wedge B) \to B$

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}\, E\wedge, 1}{(A \wedge B) \to B}\, I \to, 1$$

∎

Příklad 2.7

$A \to (B \to (A \wedge B))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [B]^2}{A \wedge B}\, I\wedge, 1, 2}{B \to (A \wedge B)}\, I \to, 2}{A \to (B \to (A \wedge B))}\, I \to, 1$$

∎

Příklad 2.8

Generalizace $\forall x$: $(A \to B) \to (A \to \forall x B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1 \qquad [A]^1}{B}\, MP, 2, 1}{\forall x B}\, I\forall}{A \to \forall x B}\, I \to, 2}{(A \to B) \to (A \to \forall x B)}\, I \to, 1$$

■

Příklad 2.9

Generalizace $\exists x$: $(A \to B) \to (\exists x A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A} \qquad \dfrac{[\exists x A]^2}{A}\, E\exists, 2}{A} \qquad [A \to B]^3}{B}\, MP.3}{\exists x A \to B}\, I \to, 2}{(A \to B) \to (\exists x A \to B)}\, I \to, 1$$

■

Příklad 2.10

$\forall x A \to A[x/t])$

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x A]^1}{A[x/t]}\, E\forall, 1}{\forall x A \to A[x/t]}\, I \to, 1$$

■

Příklad 2.11

$A[x/t] \to \exists x A$

$$\dfrac{\dfrac{[A[x/t]]^1}{\exists x A}\, I\exists, 1}{A[x/t] \to \exists x A}\, I \to, 1$$

■

Příklad 2.12

$(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1 \qquad [A]^2}{B}\,MP,2,1 \qquad \dfrac{[A \wedge \neg B]^3}{\neg B}\,E\wedge,3}{\perp}\,\perp}{\neg(A \wedge \neg B)}\,I\neg,3}{(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)}\,I \to,1$$

■

Příklad 2.13

$\neg(A \wedge \neg B) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge \neg B]^1}{\neg B}\,E\wedge,1 \qquad \dfrac{[A \to B]^2 \qquad [A]^3}{B}\,MP,3,2}{\perp}\,\perp}{\neg(A \wedge \neg B)}\,I\neg,1}{\neg(A \wedge \neg B) \to (A \to B)}\,I \to,1$$

■

V druhé kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [1, 4, 7, 8, 9, 10]

3 Gentzenův systém

V teorii důkazů a matematické logice, Gentzenův systém (sekventový kalkul) patří do skupiny formálních systémů, které sdílejí určitý způsob odvozování a některé formální vlastnosti. Gerhard Gentzen mezi rokem 1934 a 1935 představil první sekventový kalkul, který je znám jako sekventový kalkul LK a LJ. LK a LJ označují variantu sekventového kalkulu pro klasickou a intuicionistickou logiku. Důležitá věta v sekventovém kalkulu LK a LJ je věta o eliminaci řezu tak zvaný Hauptsatz. Gerhard Gentzen dále demonstroval sílu a flexibilitu této techniky, a díky její pomoci dokázal konzistenci Peanovy aritmetiky. Od této doby se sekventový kalkul rozsáhle využívá v teorii důkazů, matematické logice a automatizované dedukci.

3.1 Definice sekventového kalkulu

Gentzenův systém je sekvenotvým kalkulem, kde sekvent je definován jako dvojice konečných množin formulí Γ a Δ, které se zapisují

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Symbol dvojité šipky doprava $\Rightarrow$ (v anglické literatuře se můžeme setkat s pojmem turnstile, v češtině se jmenuje sekventová šipka) je formálním symbolem oddělujícím množiny Γ a Δ. Na levé straně sekventové šipky se nachází množina Γ, která je označována jako antecedent a na pravé straně je množina Δ označována jako sukcedent.

Neformálně sekvent může být chápan jako

$$A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_m$$

koresponduje s

$$A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee ... \vee B_m,$$

kde pořadí formulí je nepodstatné a opakující výskyty formulí můžeme vypustit, a pak danou posloupnost formulí $A_1, ..., A_n$ označujeme jako množinu formulí.
Sémantika sekventů je tvrzení, že kdykoliv všechny A ze sekvence $A_1, A_2, ..., A_n$ jsou pravdivé, pak alespoň jedno B ze sekvence $B_1, ..., B_m$ je taky pravdivé.
Aby sekvent

$$\Rightarrow B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_m.$$

byl platný, musí být alespoň jedna formule B_1 pravdivá.

Může nastat případ, kdy sukcedent je prázdný a sekvent má stejný význam jako formule

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \text{ nebo } (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow F.$$

tedy výrok je nepravdivý. Pokud sukcedent i antecedent je prázdný, pak sekvent je označován jako F, to je nepravdivý výrok.

3.2 Gentzenův kalkul LK (Klassische Prädikatenlogik)

Gerhard Gentzen v roce 1934 uvedl sekventový kalkul **LK** (kde LK představuje zkratku pro "klassische Prädikatenlogik"). Formální důkaz v sekventovém kalkulu je sekvence sekventů, kde každý sekvent je odvozený z sekventu, který se vyskytl v dřívější sekvenci. Každý takový sekvent je odvozený pomocí odvozovacích pravidel, která jsou popsána níže.

3.2.1 Základní definice LK

V sekventovém kalkulu pracujeme se sekventy ve tvaru:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

kde Γ a Δ jsou konečné multisety formulí (daná množina formulí se může vyskytovat opakovaně) nebo konečná posloupnost formulí anebo konečná množina formulí. [1]

3.2.2 Odvozovací pravidla

V sekventovém kalkulu se používají čtyři hlavní skupiny pravidel, která se dělí na axiomy, logické a strukturální pravidla a pravidlo řezu. Každé logické pravidlo zavádí novou logickou formu, a to pro pravou a levou stranu v závislosti na pozici sekventové šipky $\Rightarrow$. Strukturální pravidla pracují na bázi struktury sekventů a nezajímají se o přesný tvar formule. Logická pravidla pracují s logickými spojkami a na rozdíl od strukturálních pravidel berou v potaz přesný tvar formule.
Obecný tvar odvozovacích pravidel je charakterizován následovně:

$$\frac{S_1}{S} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{S_1 \qquad S_2}{S}$$

,

kde S_1, S_2 a S jsou sekventy, S_1, S_2 jsou předpoklady a S je závěr.

[1] V této publikaci pracujeme s třetí variantou a to s konečnými množinami formulí.

3.2.2.1 Logické axiomy

Počáteční sekventy jsou axiomy ve tvaru:

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

$$\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta$$

$$\Gamma, A \Rightarrow \top, \Delta.$$

3.2.2.2 Strukturální pravidla

V sekventovém kalkulu se používají tři strukturální pravidla. Jedná se o pravidlo **OSLABENÍ** (anglicky weakening označované *W*), **KONTRAKCI** (anglicky contraction označované *C*) a pravidlo pro **PERMUTACI** formulí (anglicky permutation označované *P*).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RW$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RC$$

$$\frac{\Gamma, B, A, \Theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Theta \Rightarrow \Delta}\, LP \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, B, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, B, A, \Delta}\, RP$$

Poznámka 3.1 V případě, že v sekventovém kalkulu zvolíme práci s konečnými multisety formulí, to znamená, že v sekventu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, Γ a Δ jsou konečné multisety formulí, pak pravidlo pro permutaci formulí se vynechá.

3.2.2.3 Pravidla pro logické spojky

$$L\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad R\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$L\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ i = 0, 1$$

$$L \to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R \to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

$$L\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\neg\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$$L\forall\ \frac{A[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$L\exists\ \frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

Poznámka 3.2 V případě pravidel $\forall R$ a $\exists L$ proměnná y se nesmí volně vyskytovat v Γ ani Δ.

V sekventovém kalkulu LK v strukturálních pravidlech a v pravidlech pro logické spojky se vyskytují hlavní formule, vedlejší formule a postranní formule. Hlavní formule je formule, která nově nebo opakovaně vznikla při použití nějakého odvozovacího pravidla. Formule, které při aplikaci nějakého odvozovacího pravidla mizí, se označuje jako vstupní formule tohoto pravidla. Ostatní formule v sekventu jsou označovány jako postranní formule.

3.2.2.4 Pravidlo řezu

V pravidle řezu se nevyskytuje žádná hlavní formule.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}\ \text{Cut}$$

3.2.2.5 Subformula property - vlastnost subformulí

V sekventovém kalkulu mají všechna odvozovací pravidla (kromě pravidla řezu) vlastnost subformulí, to znamená, že všechny odvozené formule jsou podformule konečného sekventu.

3.2.3 Charakteristika

Sekventový kalkul LK je korektní a úplný, to znamená, že každá logicky pravdivá formule je v něm dokazatelná, a pouze logicky pravdivé formule jsou dokazatelné. Podmínkou je samozřejmě to, že výše uvedená pravidla jsou správně aplikována.

3.3 Příklady

Příklad 3.1

Fromule $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\,LW}{A \wedge B \Rightarrow B}\,L\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,LW}{A \wedge B \Rightarrow A}\,L\wedge}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\wedge R}{\Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)}\,R\rightarrow$$

■

Příklad 3.2

Fromule $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}\,RW}{\neg A, A \Rightarrow B}\,L\neg \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{B, A \Rightarrow B}\,LW}{\neg A \vee B, A \Rightarrow B}\,L\vee}{\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B}\,R\rightarrow}{\Rightarrow (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)}\,R\rightarrow$$

■

Příklad 3.3

Formule $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\,L \to}{A \to B \Rightarrow \neg A, B}\,R\neg}{A \to B \Rightarrow \neg A \vee B, B}\,R\vee}{A \to B \Rightarrow \neg A \vee B, \neg A \vee B}\,R\vee}{A \to B \Rightarrow \neg A \vee B}\,RC}{\Rightarrow (A \to B) \to (\neg A \vee B)}\,R \to$$

■

Příklad 3.4

Fromule $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}\,R\vee}{\neg(A \vee B), A \Rightarrow}\,R\neg}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A}\,L\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \vee B}\,R\vee}{\neg(A \vee B), B \Rightarrow}\,L\neg}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg B}\,R\neg}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\,R\wedge}{\Rightarrow \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)}\,R \to$$

■

Příklad 3.5

Formule $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,R\neg}{\neg A \wedge \neg B, A \Rightarrow}\,L\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{\neg B, B \Rightarrow}\,R\neg}{\neg A \wedge \neg B, B \Rightarrow}\,L\wedge}{A \vee B, \neg A \wedge \neg B \Rightarrow}\,L\vee}{\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)}\,R\neg}{\Rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)}\,R \to$$

■

Příklad 3.6

Fromule $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\, L\to \qquad C \Rightarrow C}{A \to B, B \to C, A \Rightarrow C}\, L\to}{A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C}\, R\to}{(A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C}\, L\wedge}{\Rightarrow ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)}\, R\to$$

■

Příklad 3.7

Fromule $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\, L\to}{\neg B, A \to B, A \Rightarrow}\, L\neg}{A \to \neg B, A \to B, A \Rightarrow}\, L\to}{A \to \neg B, A \to B \Rightarrow \neg A}\, R\neg}{A \to \neg B \Rightarrow (A \to B) \to \neg A}\, R\to}{\Rightarrow (A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A)}\, R\to$$

■

Příklad 3.8
Fromule $\exists x(A(x) \to B) \to (\forall x A(x) \to B)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná. (Formule B neobsahuje volnou proměnnou x.)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{\forall x A(x) \Rightarrow A(a)}\,L\forall \qquad B \Rightarrow B}{A(a) \to B, \forall x A(x) \Rightarrow B}\,L\to}{\exists x(A(x) \to B), \forall x A(x) \Rightarrow B}\,L\exists}{\exists x(A(x) \to B) \Rightarrow \forall x A(x) \to B}\,R\to}{\Rightarrow \exists x(A(x) \to B) \to \forall x A(x) \to B}\,R\to}{}
$$

■

Příklad 3.9
Formlule $(\forall x A(x) \to B) \to \exists x(A(x) \to B)$ v skeventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \Rightarrow A(a), B}\,RW}{\Rightarrow A(a), A(a) \to B}\,R\to}{\Rightarrow A(a), \exists x(A(x) \to B)}\,R\exists}{\Rightarrow \forall x A(x), \exists x(A(x) \to B)}\,R\forall \qquad B \Rightarrow B}{\forall x A(x) \to B \Rightarrow \exists x(A(x) \to B), B}\,L\to}{\forall x A(x) \to B, A(a) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B), B}\,LW}{\forall x A(x) \to B \Rightarrow \exists x(A(x) \to B), A(a) \to B}\,R\to}{\forall x A(x) \to B \Rightarrow \exists x(A(x) \to B), \exists x(A(x) \to B)}\,R\exists}{\forall x A(x) \to B \Rightarrow \exists x(A(x) \to B)}\,RC}{\Rightarrow (\forall x A(x) \to B) \to \exists x(A(x) \to B)}\,R\to
$$

■

Příklad 3.10

Fromule $\exists x(A(x) \vee B(x)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \Rightarrow \exists x A(x)}\,R\exists}{A(a) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \exists B(x)}\,R\vee \qquad \dfrac{\dfrac{B(a) \Rightarrow B(a)}{B(a) \Rightarrow \exists x B(x)}\,R\exists}{B(a) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)}\,R\vee}{A(a) \vee B(a) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)}\,L\vee}{\exists x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)}\,L\exists}{\Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)) \to \exists x A(x) \vee \exists x B(x)}\,R \to
$$

■

Příklad 3.11

Formule $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \Rightarrow A(a) \vee B(a)}\,R\vee}{A(a) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))}\,R\exists}{\exists x A(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))}\,L\exists \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B(a) \Rightarrow B(a)}{B(a) \Rightarrow A(a) \vee B(a)}\,R\vee}{B(a) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))}\,R\exists}{\exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))}\,L\exists}{\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))}\,L\vee}{\Rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))}\,R \to
$$

■

Příklad 3.12
Fromule $\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

Tato formule je dokazatelná dvojím způsobem. Můžeme ji dokázat za pomoci aplikace pravidla řezu nebo bez aplikace tohoto pravidla.

- Důkaz prováděný s aplikací pravidla řezu.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \Rightarrow \exists x A(x)}\,R\exists \qquad \dfrac{\exists x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)}{\exists x A(x), \neg\exists x A(x) \Rightarrow}\,L\neg}{A(a), \neg\exists x A(x) \Rightarrow}\,Cut}{\neg\exists x A(x) \Rightarrow \neg A(a)}\,R\neg}{\neg\exists x A(x) \Rightarrow \forall x \neg A(x)}\,R\forall}{\Rightarrow \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)}\,R\to$$

- Důkaz prováděný bez aplikace pravidla řezu.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \Rightarrow \exists x A(x)}\,R\exists}{\neg\exists x A(x), A(a) \Rightarrow}\,L\neg}{\neg\exists x A(x) \Rightarrow \neg A(a)}\,R\neg}{\neg\exists x A(x) \Rightarrow \forall x \neg A(x)}\,R\forall}{\Rightarrow \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)}\,R\to$$

Dokázali jsme, že formule $\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$ je dokazatelná pomocí aplikace pravidla řezu i bez. Zároveň tyto důkazy jsou ekvivalentní.

■

Příklad 3.13

Formule $\forall x \neg A(x) \to \neg \exists x A(x)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{\neg A(a), A(a) \Rightarrow} L\neg}{\forall x \neg A(x), A(a) \Rightarrow} L\forall}{\forall x \neg A(x), \exists x A(x) \Rightarrow} L\exists}{\forall x \neg A(x) \Rightarrow \neg \exists x A(x)} R\neg}{\Rightarrow \forall x \neg A(x) \to \neg \exists x A(x)} R \to$$

■

Příklad 3.14

Formule $\forall x \forall y (R(y) \land Q(x)) \to Q(y)$ v sekventovém kalkulu LK je dokazatelná s aplikaci pravidla řezu.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(z) \Rightarrow Q(z)}{R(y) \land Q(z) \Rightarrow Q(z)} L\land}{\forall y (R(y) \land Q(z)) \Rightarrow Q(z)} L\forall}{\forall x \forall y (R(y) \land Q(x)) \Rightarrow Q(z)} L\forall}{\forall x \forall y (R(y) \land Q(x)) \Rightarrow \forall z Q(z)} L\forall \quad \dfrac{Q(y) \Rightarrow Q(y)}{\forall z Q(z) \Rightarrow Q(y)} L\forall}{\forall x \forall y (R(y) \land Q(x)) \Rightarrow Q(y)} CUT}{\Rightarrow \forall x \forall y (R(y) \land Q(x)) \to Q(y)} R \to$$

■

3.4 Gentzenův kalkul pro intuicionistickou logiku (LJ)

Sekventový kalkul LJ je subsystém LK získaný omezením všech axiomů a pravidel s nejvýše jednou formulí na pravé straně sekventu a musí být také modifikováno pravidlo pro zavedení implikace zleva následovně:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L \to$$

Sekventový kalkul LJ je korektní a úplný.

3.5 Gentzenův kalkul LK' and LJ'

Sekventové kalkuly LK′ a LJ′ jsou odvozené ze sekventových kalkulů LK a LJ pomocí vynechání strukturálních pravidel. Tato pravidla jsou absorbována do pravidel pro logické spojky.

3.6 Základní definice LK' a LJ'

V sekventovém kalkulu LK′ a sekventovém kalkulu LJ′ pracujeme se sekventy ve tvaru

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

kde Γ a Δ jsou konečné multisety formulí, konečná posloupnost formulí nebo konečná množina formulí. V sekvnetu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, Γ se nazývá antecedent a Δ sukcedent.

3.6.1 Odvozovací pravidla

Odvozovací pravidla v sekventovém kalkulu LK′ a sekventovém kalkulu LJ′ se řadí pouze do tři skupin:

- logické axiomy,
- pravidla pro logické spojky,
- pravidlo řezu.

Každé logické pravidlo zavádí novou logickou formu pro pravou a levou stranu podle pozice sekventové šipky $\Rightarrow$.
Strukturální pravidla pro tyto dvě varianty sekventového kalkulu se vynechávají, protože jsou absorbována do pravidel pro logické spojky.
V sekventovém kalkulu LK′ a sekventovém kalkulu LJ′ platí stejný tvar pro odvozovací pravidla jako pro sekventové kalkuly LK a LJ.

3.6.1.1 Logické axiomy

Počáteční sekventy jsou axiomy ve tvaru

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

$$\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta$$

$$\Gamma, A \Rightarrow \top, \Delta$$

3.6.1.2 Logická pravidla pro LK'

$$L\wedge \; \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\wedge \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$L\vee \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\vee \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$L \rightarrow \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R \rightarrow \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$L\neg \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\neg \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$$L\forall \; \frac{A[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\forall \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$L\exists \; \frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\exists \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

Poznámka 3.3 V případě pravidel $\forall R$ a $\exists L$ se proměnná y nesmí volně vyskytovat v Γ ani Δ.

3.6.1.3 Logická pravidla pro LJ'

$$L\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad R\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$L\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad R\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow Ai}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ \text{i = 0, 1}$$

$$L\rightarrow\ \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad R\rightarrow\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$L\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow} \qquad R\neg\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

$$L\forall\ \frac{A[x/t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad R\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}$$

$$L\exists\ \frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad R\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

Poznámka 3.4 V případě pravidel $\forall R$ a $\exists L$ se proměnná y nesmí volně vyskytovat v Γ ani C.

3.6.1.4 Pravidlo řezu

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}\ \text{Cut}$$

3.6.2 Invertibilita logických pravidel.

V sekventovém kalkulu LK' a LJ' dochází k invertibilitě pravidel při zachování hloubky. To znamená, že pravidla jsou platná i obráceně. Obecné pravidlo má v tomto případě tvar:

$$\frac{S_1 \qquad S_2}{S} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{S_1}{S}$$

a S_1, S_2, S jsou sekventy. Pravidlo je invertibilní, pokud je zachována hloubka, tedy

$$\vdash_n S_1 \text{ a } \vdash_n S_2 \text{ pak } \vdash_n S.$$

Inverzní lemma pro logická pravidla mají tvar:

$$\frac{\vdash_n A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_n A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \wedge A_1}{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A_i} \; i \in \{0, 1\}$$

$$\frac{\vdash_n A_0 \vee A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_n A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}$$

$$\frac{\vdash_n \Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A \vdash_n \Gamma, B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\vdash_n \Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}{\vdash_n \Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$\frac{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta \forall x A}{\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta A[x/y]}$$ proměnná y není volná v Γ, Δ, A

$$\frac{\vdash_n \exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_n A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}$$ proměnná y není volná v Γ, Δ, A

V sekventovém kalkulu LJ′ nejsou všechny pravidla invertibilní a řadí se mezi ně:

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, Ai}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \text{ i = 0, 1}$$

$$L \to \frac{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

3.6.3 Charakteristika

Sekventový kalkul LK′ a sekventový kalkul LJ′ je korektní a úplný, to znamená, že každá logicky pravdivá formule je v něm dokazatelná, a pouze logicky pravdivé formule jsou dokazatelné. Podmínkou je samozřejmě to, že výše uvedená pravidla jsou správně aplikována.

3.7 Teorém eliminace řezu - Gentzenův Hauspatz

Teorém eliminace řezu (také Gentzenův Hauptsatz) je základní a velmi významný v sekventovém kalkulu. V roce 1934 Gerhard Gentzen dokázal tento teorém. Důkaz teorému eliminace řezu je popsán v práci "Investagations in Logical Deduction"pro formální systém intuicinisticiké (LJ) a klasické (LK) logiky.
Teorém eliminace řezu říká, že jakýkoliv úsudek dokázaný v sekventovém kalkulu s aplikaci pravidla řezu, je také dokazatelný bez použití pravidla řezu.

3.7.1 Pravidlo řezu

Pravidlo řezu jsme si už predstavili v kapitole 3.2.2.4.

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ n \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ m \\ \vdots \\ A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

Poznámka 3.5 Symboly m a n označují úroveň řezu. Jejich součet znamená součet hloubek předpokladů.

Úroveň řezu je definována jako součet hloubek z odvozených předpokladů, tedy stupeň řezu na A je $|A| + 1$. Stupeň řezu v důkazu $\mathcal{D}$ (také označován jako $cr(\mathcal{D})$), je maximální stupeň řezu v důkazu $\mathcal{D}$.

3.7.2 Věta o eliminaci řezu

Je-li sekvent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dokazatelný v $S + Cut$, pak je dokazatelný i v S. Tedy existuje algoritmus eliminace řezu tak, že dojde k lokálním úpravám důkazů.
To znamená, že každý důkaz, ve kterém se aplikuje pravidlo řezu, jde přepsat na důkaz bez použití pravidla řezu. Tedy důkaz jde dokázat bez aplikace pravidla řezu.
Důkaz eliminace řezu je vedený pomocí dvojí indukce. Jedna indukce je aplikována na *řezový stupeň*, zatímco subindukce (druhá indukce) je aplikována na *úroveň řezu*. Je důležité mít na paměti, že zvažujeme pouze důkazy s axiomy, kde hlavní formule je atomická. V takovém případě stačí ukázat, že níže uvedený důkaz $\mathcal{D}$,

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{D}_1' \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{D}_2'' \\ \vdots \\ A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{D} \\ \vdots \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

který končí pomocí aplikace pravidla řezu, a kde $cr(\mathcal{D}_1')$, $cr(\mathcal{D}_2'') \leq |\mathcal{D}|$ jde transformovat na důkaz, kde stupeň řezu je ohraničený $|\mathcal{D}|$. Na základně indukční hypotézy důkazy $\mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_2''$ můžeme nahradit za bezřezové důkazy $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$. Pak existují tři způsoby:

I. Alespoň jedna formule $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ je axiom.

   Nechť $\mathcal{D}_1$ je axiom a A není hlavní formule.
   Pokud se řezová formule různí od hlavní formule axiomu, pak aplikace řezu vypadá následovně:

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{D}_1 \\ \vdots \\ \Gamma, P \Rightarrow A, P, \Delta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{D}_2 \\ \vdots \\ \Gamma', A \Rightarrow \Delta' \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', P \Rightarrow P, \Delta, \Delta'}$$

   Tento řez může být jednoduše nahrazen novým axiomem $\Gamma, \Gamma', P \Rightarrow P, \Delta, \Delta'$.

II. V druhém případě formule $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ nejsou axiomy a A není hlavní formule v posledním kroku jednoho z výše uvedených axiomů. Zde bude pravidlo řezu znovu permutovat přes pravidla směrem nahoru, pokud zvážíme, že hlavní formule není v $\mathcal{D}_1$, tedy na levé straně. Příklad s důkazem je následovný:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ k \\ \vdots \\ \Gamma'' \Rightarrow A, \Delta'' \end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\, k+1 \qquad \begin{matrix} \vdots \\ m \\ \vdots \\ \Gamma', A \Rightarrow \Delta' \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, Cut$$

   Poznámka 3.6 Písmeno k je hloubka předpokladu, níže uvedené $k+1$ zvýšení hloubky předchozího předpokladu, protože bylo použito pravidlo a m je také hloubka předpokladu, ale na pravé straně. Celkový součet hloubky předpokladů pro toto odvození je $k+m+1$, také to znamená úroveň řezu.

Pokud důkaz upravíme tak, že pravidlo řezu přepermutujeme nahoru skrze pravidla, budeme mít stejný stupeň řezu, ale zmenší se nám úroveň řezu.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ m\\ \vdots\\ \Gamma''\Rightarrow A,\Delta''\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\vdots\\ k\\ \vdots\\ \Gamma',A\Rightarrow\Delta'\end{matrix}}{\Gamma',\Gamma''\Rightarrow\Delta',\Delta''}\,Cut}{\Gamma,\Gamma'\Rightarrow\Delta,\Delta'}\,R \qquad\qquad \begin{matrix}\vdots\\ k+m\\ \vdots\end{matrix}$$

Poznámka 3.7 Po upravení odvození se zmenšila úroveň řezu pouze na $m + k$, ale stupeň řezu se nezměnil.

V případě, kdy hlavní formule není v $\mathcal{D}_2$, tedy na pravé straně, to platí stejně, ale symetricky.

III. A je hlavní formule v posledním kroku $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$.

Rozbor podle hlavní spojky ve formuli A

a) $A = \alpha \wedge \beta$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ k\\ \vdots\\ \Gamma\Rightarrow\alpha,\Delta\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\vdots\\ l\\ \vdots\\ \Gamma\Rightarrow\beta,\Delta\end{matrix}}{\Gamma\Rightarrow\alpha\wedge\beta,\Delta}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ m\\ \vdots\\ \Gamma',\alpha,\beta\Rightarrow\Delta'\end{matrix}}{\Gamma',\alpha\wedge\beta\Rightarrow\Delta'}}{\Gamma,\Gamma'\Rightarrow\Delta,\Delta'}$$

Poznámka 3.8 Stupeň řezu je $|\alpha \wedge \beta| = 1$, a úroveň řezu tedy je $max(k, l) + 1 + m + 1$. Přičítá se 1, protože bylo aplikováno pravidlo zavedení nějaké spojky. Tady v tom případě se jednalo o zavedení logické spojky konjunkce.

Při úpravě tohoto důkazu dojde ke zmenšení řezového stupně důkazu z $|\alpha \wedge \beta|$ pouze na $|\alpha|$ a $|\beta|$ a také se zmenší i úroveň řezu na $max(m, l) + k$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ k\\ \vdots\\ \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ l\\ \vdots\\ \Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ m\\ \vdots\\ \Gamma'\alpha, \beta \Rightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma', \beta \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, Cut \longrightarrow rank|\alpha|}{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'\\ \vdots\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, C}\, Cut \longrightarrow rank|\beta|$$

Poznámka 3.9 Stejný postup můžeme aplikovat pro řezovou formuli $\alpha \vee \beta$

b) $A = \alpha \to \beta$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ k\\ \vdots\\ \Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta, \Delta}\, R \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ l\\ \vdots\\ \Gamma' \Rightarrow \alpha, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ m\\ \vdots\\ \Gamma'\beta \Rightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma'\alpha \to \beta \Rightarrow \Delta'}\, R}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, Cut$$

Pokud upravíme tento důkaz pomocí permutace pravidla řezu nahoru, zmenšíme tím úroveň řezu na $max((k, l) + m + 1)$ oproti původnímu důkazu, kde úroveň řezu byla $max((l, m) + k + 2)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ k\\ \vdots\\ \Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ l\\ \vdots\\ \Gamma' \Rightarrow \alpha, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \beta\Delta, \Delta'}\, Cut \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ m\\ \vdots\\ \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta'\\ \vdots\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\, C}\, Cut$$

3.8 Důkaz simulace kalkulu přirozené dedukce pomoci sekventového kalkulu s řezem

Kalkul přirozené dedukce můžeme simulovat pomocí sekventového kalkulu s řezem, protože pravidlo řezu, jak je reprezentováno v sekventovém kalkulku LK

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,Cut$$

je ekvivalentní pro eliminační pravidla v přirozené dedukci.

Příklad 3.15
Eliminace konjunkce

Eliminační pravidlo v systému přirozené dedukce	Pravidlo řezu v sekventovém kalkulu
$\dfrac{\begin{matrix}\Delta \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$	$\dfrac{\begin{matrix}\Delta \\ \Gamma \Rightarrow A \wedge B\end{matrix} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A}}{\Gamma \Rightarrow A}\,Cut$

■

Příklad 3.16
Eliminace implikace

Eliminační pravidlo v systému přirozené dedukce	Pravidlo řezu v sekventovém kalkulu
$\dfrac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ A \to B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2 \\ A\end{matrix}}{B}$	$\dfrac{\begin{matrix}\Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow A \to B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Delta_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow A\end{matrix} \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, \Gamma_2 \Rightarrow B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}\,Cut$

■

V třetí kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [1, 2, 3, 5, 7, 8]

4 Varianty sekventových kalkulů pro substrukturální logiky

Substrukturální logiky získaly své pojmenování díky faktu, že zejména bezprostřední způsob, jak je představit, je pomocí sekventového kalkulu (Gentzenovský kalkul), kde jedno nebo více strukturálních pravidel (oslabení, kontrakce, permutace) jsou omezené nebo dokonce i úplně vypuštěné. Zcela nezávisle na prezentaci důkazů, substrukturální logiky se od klasické logiky liší tím, že mohou nabídnout detailnější analýzu logických konstant, například zatímco v klasické logice je jednoduchá disjunkce a konjunkce. Téma substrukturální logiky plynule navazuje na výzkum v univerzální algebře (například teorie reziduálních svazů), teoretické informatice (studium paralelismu) a teoretické lingvistice.

Mezi substrukturální logiky patří velice známé neklasické logiky, jako například Lambek kalkulus pro kategorickou gramatiku (bez strukturálních pravidel), lineární logika (pouze s pravidlem permutace formulí) a relevantní logiky, které neobsahují pravidlo oslabení.

4.1 Strukturální pravidla v Gentzénovském sekventovém kalkulu

Gentzenův sekventový systém, jak je popsán v kapitole 3, je složený z:

I. **jazyka**, který se skládá z logických spojek $\vee, \wedge, \rightarrow$ a $\neg$.

II. **sekventu** vyjádřeného jako $\alpha_1, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta_1, ..., \beta_n$, kde $m, n \geq 0$, což je intuitivní vyjádření $\alpha_n \wedge ... \wedge \alpha_m \rightarrow \beta_1 \vee ... \vee \beta_n$. Počáteční sekvent má podobu $\alpha \Rightarrow \alpha$.

III. řeckých písmen Γ, Δ, Θ, které naznačují (případně i prázdnou) sekvenci formulí.

Odvozovací pravidla pro sekventový kalkul se mohou dělit do tří skupin - strukturální pravidla, pravidlo řezu a pravidlo pro logické spojky.

Strukturální pravidla:
V sekventovém kalkulu jsou definována tři strukturální pravidla, které jsou ještě rozdělené na pravé a levé. Jedná se o pravidlo oslabení, kontrakci a permutaci.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RW$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, RC$$

$$\frac{\Gamma, B, A, \Theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Theta \Rightarrow \Delta}\, LP \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, B, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, B, A, \Delta}\, RP$$

Pravidlo pro permutaci není zapotřebí v případě, pokud v sekventu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, Γ a Δ jsou konečné multisety formulí.

Pravidla pro logické spojky sekvnetového kalkulu pro substrukturální logiku jsou definována stejně jako pravidla pro logické spojky v sekventový kalku LK (popř. LK') a sekventovém kalkulu LJ (popř. LJ'). (Viz.3.2, 3.4, 3.6).

Pravidlo řezu:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}\, \text{Cut}$$

V sekventovém kalkulu pro substrukturální logiky může dojít k vyloučeni strukturálních pravidel pro levou stranu (oslabení a kontrakce), a je nutné, si tato pravidla podrobně vysvětlit.

I. **Pravidlo permutace proměnných levé strany**

$$\frac{\Gamma, B, A, \Theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Theta \Rightarrow \Delta}\, LP$$

Pravidlo permutace nám umožňuje použít předpoklady, např. formule v jakémkoliv pořadí.

II. **Pravidlo oslabení levé strany**

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LW$$

Uvedené pravidlo nám umožňuje přidat redundantní předpoklad. To znamená, že pokud máme sekvent $\Pi \Rightarrow \Theta$ dokazatelný v systému bez pravidla oslabení, pak to znamená, že každý předpoklad (to je každá formule v Π) musí být použita aspoň jednou v důkazu $\Pi \Rightarrow \Theta$.

III. **Pravidlo kontrakce levé strany**

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LC$$

Zde nám pravidlo dovoluje použít každý předpoklad více než jednou. V případě, kdy pravidlo kontrakce na levé straně sekventu chybí, pak každý jeho předpoklad je použit aspoň jednou v důkazu.

Výše zmíněné argumenty sugerují, že čárky na levé straně sekventu se nechovají jako konjunkce, když některé strukturální pravidla chybí. Zatímco podle původní definice v gentzenovském sekventovém kalkulu se jeví jako konjunkce.
Aby bylo vysvětleno, co *čárky* v pravidlech znamenají, si můžeme zavést například znaménko pro násobení $*$, které bude reprezentovat čárku v substrukturálních logikách. Tato spojka $*$ se někdy označuje jako fúze nebo multiplikativní konjunkce, zatímco obyčejná konjunkce se nazývá aditivní.
Příkladem nám můžeme být pravidlo pro konjunkci na levé straně v LK′ systému, kde právě místo konjunkce dosadíme $*$.

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A * B \Rightarrow \Delta} L* \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A * B, \Delta, \Delta'} R*$$

V sekventovém systému, který obsahuje pravidlo $*$ a pravidlo řezu, pak sekvent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ je interpretován jako $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \Rightarrow \beta$ a je dokazatelný pouze pokud $\alpha_1 * \alpha_2 * ... * \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelné.

Pokud v skeventovém kalkulu pro substrukturální logiku chceme dokázat ekvivalenci pravidla zavedení konjunkce na levé straně sekventu v sekventovém systému LK

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} L\wedge$$

a pravidlo pro zavedení konjunkce na levé straně sekvnetu v sekventovém kalkulku LK′

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} L'\wedge$$

pak se neobejdeme bez strukturálního pravidla pro oslabení a kontrakci.

Příklad 4.1
Pravidla $\wedge L'$ a $\wedge L$ jsou ekivalentní za předpokladu, že v sekventovém kalkulu pro substrukurální logiku není vyloučené pravidlo pro kontrakci a oslabení.

I. Pravidlo $L'\wedge$ můžeme simulovat pomocí pravidla $L\wedge$ a pokud máme pravidlo pro kontrakci.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \wedge B}\ LC$$

II. Pravidlo $L\wedge$ můžeme simulovat pomocí pravidla $L'\wedge$ a pokud máme pravidlo pro oslabení.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}\ LW}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}\ LW}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}$$

■

Ve čtvrté kapitole bylo čerpáno ze zdrojů [6]

5 Závěr

Úvodní část práce je věnována historii logiky. Jsou zde představeny dějiny logiky od úplných začátků až po první polovinu 20. století, kdy se začala psát historie moderní logiky. První polovina 20. století byla pro logiku velmi významná, protože David Hilbert vyhlásil svůj program, kde se snažil axiomatizovat matematiku, aby se vyhnul paradoxům. Další velmi významnou událostí bylo dokázání vět o neúplnosti aritmetiky, které Kurt Gödel prezentoval ve svém článku Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Díky důkazu vět o neúplnosti aritmetiky, které dokázal Kurt Gödel, se ukázalo, že Hilbertův program je neuskutečnitelný. Paralelně se vyvíjela strukturální teorie důkazů, která vedla k tomu aby Gerhard Gentzen, žák Davida Hilberta, reagoval na tuto skutečnost a uvedl nový systém, který se jmenoval přirozená dedukce. Gerhard Gentzen ještě později publikoval sekventový systém, kde uvedl teorém eliminace řezu. Pomocí aplikace teorému řezu byl Gerhard Gentzen schopný dokázat konzistenci Peanovy aritmetiky.

V další kapitole jsou strukturálně popsané výše zmiňované dva důkazové kalkuly, a to Hilbertův kalklul a kalkul přirozené dedukce. Zde jsou popsané rozdíly těchto dvou kalkulů, a také, jak se v jednotlivých kalkulech pracuje.

Třetí kapitola je věnovaná poslednímu zmiňovanému kalkulu, který se nazývá Gentzenův kalkul (jinak také označovaný jako sekventový systém). Zde je vysvětlen pojem varianta sekventového kalkulu LK a LJ s podrobnou charakteristkou těchto dvou variant kalkulu. Jsou představená odvozovací pravidla (strukturální pravidla, pravidla pro logické spojky a pravidlo řezu) pro obě varianty sekventového kalkulu. V práci jje uvedeno i rozšíření sekventového kalkulu LK a LJ, kde se jedná o absorbování strukturálních pravidel do pravidel pro logické spojky. Část kapitoly je také věnována významnému důkazu Gerharda Gentzena, a to důkazu eliminace řezu (jinak také nazývaný Hauptsatz).

V poslední kapitole je řešena varianta sekventového kalkulu pro substrukturální logiky.

Práce podává přehledný a ucelený pohled na tři varianty důkazových kalkulů s důrazem na Gentzenův důkazový kalkul (sekventový kalkul) s vypracovanými příklady pro každou variantu důkazového kalkulu. Tato práce tak může být použita jako studijní materiál pro posluchače předmětu Vybrané partie matematické logiky.

6 Reference

[1] Troelstra, Anne, Sjerp and Schwichtenberg, Helmut *Basic Proof Theory*, Cambridge, The Great Britain: Cambridge University Press, 1996.

[2] Szabo, M. E. *The Collected Papers Of Gerhard Gentzen*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing Company, 1969.

[3] Kleene, S. C. *Introduction to Metamathematics*, Princeton: Van Nostrand, 1964.

[4] Duží, Marie *Logika pro informatiky*, Ostrava: Vydavatelství VŠB - TU Ostrava, 2012.

[5] Gentzen, Gerhard *Investigation Into Logical Deduction I and II*, Illinois, American Philosophical Quarterly. Vol 1 and 2, 1964 and 1965.

[6] Hiroakira, Ono *Substructural Logics and Residuated Lattices*, Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[7] Švejdar, Vítězslav *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*, Praha: Academia, 2002.

[8] Vavrečková, Šárka *Logika a logické programování*, Opava: Slezská univerzita v Opavě 2005.

[9] Bruscoli, Paola and Guglielmi, Alessio *A Tutorial on Proof Theoretic Foundations of Logic Programming*, Dresden: Technische Universitat Dresden, 2003

[10] Strasburger, Lutz *Introduction to Proof Theory*, Copenhagen: University of Copenhagen, 2010

[11] Bochienski, I. M. *A History of Formal Logic*, New York: 1956

[12] Kneale, Wiliam and Kneale, Martha *The Development of Logic*, Oxford: 1962

[13] Vihan, Přemysl *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Praha: 1992